

Ivano Primi

SISTEMI DINAMICI NON LINEARI E CAOS DETERMINISTICO

1. *Introduzione*

La grande forza della scienza sta nella sua capacità di collegare cause ed effetti e di permettere in questo modo di prevedere lo svolgersi di molti fenomeni naturali con grande anticipo. Sulla base delle leggi della gravitazione universale è possibile, ad esempio, prevedere le eclissi o il passaggio di comete anche con migliaia di anni di anticipo. Altri fenomeni però non sono altrettanto prevedibili. Il moto dell'atmosfera segue le leggi della fisica al pari del moto dei pianeti; tuttavia, le previsioni del tempo vengono ancora espresse in termini probabilistici e la probabilità che si rivelino errate è tanto maggiore quanto più lontano è il giorno a cui esse si riferiscono. L'evoluzione delle condizioni meteorologiche, lo scorrere di un ruscello, il rotolare di un dado presentano aspetti imprevedibili. Poiché in questi fenomeni non esiste una chiara relazione tra causa ed effetto, si dice che contengono elementi aleatori. Tuttavia fino a poco tempo fa non vi erano dei motivi validi per dubitare che in linea di principio si potesse giungere ad una prevedibilità rigorosa anche di fenomeni siffatti. Si riteneva che bastasse raccogliere ed elaborare una quantità sufficiente di informazioni. Questa opinione è stata modificata di recente da una scoperta sorprendente. Si è infatti avuto modo di constatare che sistemi fisici costituiti da pochi elementi e soggetti a regole fisse, peraltro molto semplici, possono manifestare un comportamento aleatorio. Questa aleatorietà è di natura essenziale e non scompare se si raccoglie una maggiore quantità di informazione. A questo genere di aleatorietà si è dato il nome di "caos". Un paradosso apparente è che il caos è deterministico, cioè è generato da regole fisse che, di per sé, non contengono alcun elemento casuale. In linea di principio ciò che accadrà in futuro è completamente determinato dalla situazione attuale ma in pratica le piccole imprecisioni con cui questa è conosciuta vengono amplificate; quindi, benché il comportamento del sistema fisico che si sta osservando sia prevedibile a breve scadenza, alla lunga non è più tale. La scoperta del "caos deterministico" ha creato un paradigma nuovo fra i modelli scientifici. Da una parte comporta l'esistenza di nuove limitazioni fondamentali alla nostra capacità di compiere previsioni; dall'altra, il determinismo inerente al caos implica che molti fenomeni aleatori siano più prevedibili di quanto si potesse pensare: informazioni apparentemente aleatorie raccolte in passato (e archiviate perché ritenute troppo complicate) oggi possono essere spiegate in termini di leggi semplici.

2. Sistemi dinamici e teorema di Cauchy

Alla definizione di “caos deterministico” si è arrivati attraverso metodi e risultati di carattere matematico. Questi risultati sono stati ottenuti nell’ambito di quel settore della Matematica noto come Teoria qualitativa dei sistemi dinamici e sono stati stimolati dall’esigenza di rappresentare i fenomeni fisici reali che evolvono nel tempo, come il moto dei pianeti, le oscillazioni di un pendolo, il flusso delle correnti atmosferiche, la crescita della popolazione di animali di una certa specie all’interno di una certa regione di territorio. Prima di giungere all’esposizione di questi risultati è necessario introdurre alcuni concetti e termini di fondamentale rilevanza per la comprensione del discorso successivo. Innanzitutto occorre chiarire che cosa si deve intendere per “sistema dinamico”. Usando le parole più semplici possibili possiamo definire un sistema dinamico come un insieme composto da un numero arbitrario, anche molto grande, di oggetti fisici, il cui stato, in virtù delle interazioni che hanno luogo tra di essi e/o dell’azione di forze esterne, muta nel tempo. Quando diciamo che lo stato di un sistema fisico muta nel tempo intendiamo dire che le grandezze misurabili che lo caratterizzano risultano variare al trascorrere del tempo. È il caso di ricordare, infatti, che lo studio scientifico di un sistema di oggetti fisici comporta in primo luogo la scelta di valori o quantità o, per meglio dire, grandezze misurabili sperimentalmente attraverso le quali sia possibile avere ad ogni istante tutte le informazioni interessanti relative agli elementi che compongono il sistema. Un esempio di sistema dinamico abbastanza semplice da individuare è costituito dal Sole, dai pianeti e dai satelliti che compongono il nostro sistema solare. Quando un astronomo studia questo particolare sistema fisico solitamente ciò che gli interessa conoscere sono le posizioni degli elementi che lo compongono rispetto ad un determinato sistema di riferimento, usualmente costituito da una terna di assi cartesiani ortogonali che ha origine nel Sole e assi orientati in base alla direzione di alcune stelle fisse. Pertanto le grandezze misurabili che saranno da lui usate per descrivere istante dopo istante lo stato del sistema solare saranno proprio le posizioni dei vari pianeti e satelliti rispetto al sistema di riferimento prescelto. Siccome la posizione di un astro è data dalla terna delle sue coordinate (x,y,z) rispetto al sistema di riferimento prefissato e ciascuna di queste coordinate è un valore numerico in una certa unità di misura, lo stato del sistema solare viene ad essere descritto, in definitiva, da un insieme finito di valori numerici, vale a dire le coordinate degli astri che lo compongono rispetto al sistema di riferimento prestabilito. Il sistema solare è un esempio di sistema dinamico in quanto, variando nel tempo la posizione di pianeti e satelliti, le grandezze misurabili che lo caratterizzano risultano mutare man mano che il tempo trascorre. Le grandezze misurabili usate per caratterizzare lo stato di un sistema dinamico sono dette “variabili di stato”. Nel caso del sistema solare esse sono date dalle coordinate di pianeti e satelliti rispetto al sistema di riferimento prefissato. In molti problemi di Fisica e, specificamente, di Meccanica lo stato del sistema in un dato istante è determinato dall’insieme delle posizioni e delle velocità dei corpi che lo costituiscono. Ad esempio, per un pendolo che oscilla lo stato ad un certo istante è

dato dall'angolo della cordicella rispetto alla verticale passante per il punto a cui essa è fissata e dalla velocità della pallina che alla cordicella è appesa. Nel caso di un ecosistema, cioè di un sistema dinamico i cui elementi sono gli individui di determinate specie animali presenti all'interno di una data regione, lo stato può essere invece caratterizzato assegnando il numero di individui per ciascuna specie animale che ne fa parte. Prescindendo dalla particolare natura del sistema dinamico che si sta considerando, si può dire che lo stato di un sistema dinamico ad un dato istante t è definito univocamente dai valori delle sue variabili di stato in quell'istante. Se chiamiamo x_1, x_2, \dots, x_N queste variabili e indichiamo con $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ i loro valori all'istante t , lo stato del sistema al tempo t viene ad essere espresso dall'insieme ordinato di valori

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) .$$

I sistemi dinamici sono solitamente ripartiti in due grandi categorie: quella dei sistemi dinamici “a tempo continuo” e quella dei sistemi dinamici “a tempo discreto”. Un sistema dinamico è a tempo continuo quando esso si evolve con continuità nel tempo, ossia quando le variazioni del suo stato non possono essere circoscritte a cambiamenti che si producono in istanti ben precisi; è il caso di un pendolo oscillante, giacché questo si muove con continuità da uno stato all'altro. È anche il caso del sistema solare, poiché i pianeti e i satelliti si muovono con continuità lungo le loro orbite e non saltano da una posizione all'altra in certi istanti per poi restare fermi per interi intervalli di tempo. Un sistema dinamico è invece a tempo discreto quando le variazioni del suo stato avvengono in istanti ben precisi, in ciascuno dei quali il sistema salta immediatamente da uno stato ad un'altro. Gli ecosistemi sono gli esempi più ovvii di sistemi dinamici a tempo discreto, giacché la nascita e la morte degli individui di una data specie animale o vegetale presenti all'interno di un territorio circoscritto sono fenomeni che avvengono in istanti ben precisi ed è proprio in questi istanti che lo stato di un ecosistema subisce variazioni. Indipendentemente dal fatto che si abbia a che fare con un sistema dinamico a tempo continuo o con uno a tempo discreto, da un punto di vista formale conoscere un sistema dinamico significa conoscere una legge matematica che, una volta assegnato lo stato del sistema ad un certo istante iniziale t_0 , permetta di determinare univocamente (cioè senza ambiguità e con precisione) lo stato del sistema ad ogni istante temporale successivo. Questa legge matematica, ammesso che sia possibile esplicitarla, si dice “legge di evoluzione temporale” del sistema dinamico in esame. Data una “condizione iniziale”

$$\mathbf{X}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_N(t_0)) ,$$

dati cioè i valori delle variabili di stato ad un istante iniziale t_0 , l'insieme dei valori delle variabili di stato ottenuti applicando la legge di evoluzione temporale a partire

dalla condizione iniziale costituisce la “traiettoria” del sistema dinamico passante per la condizione iniziale assegnata. In pratica, conoscere le traiettorie significa poter calcolare lo stato del sistema ad un qualunque istante futuro sulla base della conoscenza del suo stato ad un prefissato istante iniziale. Un esempio molto semplice servirà a chiarire quanto appena detto. Consideriamo il sistema dinamico costituito da un grave che, ad un fissato istante iniziale $t_0=0$, viene lasciato cadere nel vuoto da un'altezza h_0 (nel momento in cui viene lasciato cadere la sua velocità è $v_0=0$). Dovrebbe essere noto (in realtà questo è vero solo in prima approssimazione) che il moto di caduta del grave avviene lungo la verticale che congiunge la sua posizione iniziale al centro della terra con accelerazione costante pari a $g=0.98... m/s^2$. Questo implica che, partendo dall'istante iniziale $t_0=0$, la velocità del grave si deve evolvere secondo la legge temporale:

$$v = v_0 + gt,$$

dove $v_0=0$ è la velocità all'istante iniziale, mentre la sua altezza da terra all'istante t è data

$$h = h_0 - v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

Nel caso di questo semplicissimo sistema dinamico le variabili di stato sono la velocità v e l'altezza h . La condizione iniziale del sistema è data dai valori v_0 e h_0 della velocità e dell'altezza all'istante iniziale. L'equazione

$$h = h_0 - v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

è la legge di evoluzione temporale del sistema dinamico che stiamo considerando. Essa consente, noti i valori v_0 e h_0 , di determinare la velocità e la posizione del grave durante tutto il suo moto di caduta verso terra. La traiettoria in questo caso è data dai valori assunti da h e da v durante il moto di caduta; essi possono essere calcolati attraverso la legge di evoluzione temporale che, una volta assegnati v_0 e h_0 , li determina univocamente. In molti casi non è affatto semplice determinare la legge di evoluzione temporale di un sistema dinamico e si cerca di risalire ad essa attraverso la formulazione di leggi di evoluzione locale, dette “equazioni del moto”. Nel caso di sistemi dinamici a tempo continuo le equazioni del moto vengono ad essere date da “equazioni differenziali”. Non è possibile spiegare qui che cosa sia esattamente un'equazione differenziale, giacché per farlo occorrerebbero strumenti concettuali molto complessi ed evidentemente impossibili da esplicitare nel breve spazio di questo contributo. Si può tuttavia dire che le equazioni differenziali di un sistema

dinamico descrivono come la rapidità di variazione di ciascuna variabile di stato dipenda dal tempo, da se stessa e dalle altre variabili. Esse esprimono in forma matematica qual è ad ogni tempo la variazione istantanea dello stato del sistema dinamico a cui si riferiscono. A differenza della legge di evoluzione temporale, che dà delle informazioni sull'evoluzione del sistema in intervalli di tempo anche molto lunghi, le equazioni del moto danno delle informazioni valide istante per istante e permettono soltanto, nota la condizione del sistema dinamico ad un certo istante, di conoscere quella relativa ad istanti immediatamente successivi. Tornando all'esempio precedente del grave in caduta libera, le equazioni del moto sono date da

$$\frac{dv}{dt} = g \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

dove g è l'accelerazione di gravità, mentre dt , dv e ds hanno, rispettivamente, il significato di variazione temporale, variazione di velocità e variazione di posizione. La prima equazione dice che, in un qualsiasi istante, la variazione di velocità nell'unità di tempo (cioè l'accelerazione) è costante e uguale a g , la seconda significa semplicemente che la velocità (istantanea) è lo spazio percorso nell'unità di tempo e quindi altro non è che l'espressione matematica della definizione di velocità (istantanea). Non sto a spiegare come dalle precedenti equazioni si arrivi a ricavare la legge di evoluzione temporale del moto di caduta del grave. Basta sapere che questo è un caso particolarmente semplice, anzi, il più semplice possibile dal punto di vista matematico: in genere è assai più difficile ricavare la legge di evoluzione temporale di un sistema dinamico a partire dalle equazioni differenziali del moto. Tuttavia è intuitivo pensare che, almeno in linea di principio, debba essere sempre possibile risalire dalle equazioni del moto alla legge di evoluzione temporale. Abbiamo detto che le equazioni del moto esprimono in forma matematica qual è, ad ogni tempo, la variazione istantanea dello stato del sistema dinamico a cui si riferiscono. Quindi, conoscendo le equazioni del moto e la condizione del sistema ad un istante arbitrariamente fissato è possibile risalire a quello che sarà il suo stato in tempi immediatamente successivi. Ma se si è in grado di fare questo per ogni fissato istante allora si deve essere in grado, una volta nota la condizione iniziale del sistema dinamico, di determinare univocamente l'intera sua traiettoria, di ricostruire cioè l'intera sua evoluzione temporale. In effetti, un importantissimo teorema di matematica afferma che, date le equazioni differenziali del moto e assegnata la condizione iniziale del sistema, esiste una ed una sola legge di evoluzione temporale che corrisponde ad esse, o, come anche si suol dire, esiste una ed una sola traiettoria che passa per la condizione iniziale assegnata e obbedisce alle equazioni differenziali del moto. Benché questo teorema porti il nome del matematico francese Augustin Louis Cauchy, vissuto nel XIX secolo, dal momento che a lui si deve la formulazione

matematica rigorosa del suo enunciato e anche la sua prima ineccepibile dimostrazione formale, la sua scoperta risale all'opera di Isaac Newton, il quale sviluppò anche un metodo generale per il calcolo effettivo della legge di evoluzione temporale a partire dalle equazioni del moto. Ovviamente questo metodo divenne poi patrimonio comune dei fisici e dei matematici e strumento privilegiato per lo studio dei sistemi naturali che evolvono nel tempo. Va detto a questo punto che, mentre può essere molto difficile arrivare a dedurre direttamente la legge di evoluzione temporale di un sistema dinamico, la deduzione delle equazioni di moto a partire dalla descrizione del sistema si presenta molto più semplice. Questo fa capire quanto siano importanti il teorema di Cauchy e i metodi sviluppati da Newton, da Eulero e da molti altri matematici del XVIII secolo con lo scopo di ricavare le leggi di evoluzione temporale a partire dalle equazioni del moto (note le condizioni iniziali). Un esempio particolare, ma non troppo, in cui quanto detto trova applicazione è dato dallo studio del moto di una particella (corpo puntiforme) sotto l'azione di un campo di forze \mathbf{F} . Dovrebbe essere noto che, in base al secondo principio della dinamica, un corpo puntiforme soggetto all'azione di una forza esterna \mathbf{F} si muove, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale¹, con un'accelerazione \mathbf{a} tale che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

dove m è la massa del corpo. Un corpo puntiforme in movimento è un sistema dinamico le cui variabili di stato sono posizione e velocità istantanee del corpo. Supponiamo, per semplificare le cose, che la forza \mathbf{F} agisca sempre nella stessa direzione, in modo tale che il corpo a cui è applicata si muova lungo una linea retta (la retta d'azione della forza). Una volta che a questa retta sia stata data un'orientazione, che sia stato scelto un punto origine su di essa e che sia stata scelta un'unità di misura, è possibile individuare la posizione del corpo tramite un valore numerico, la cosiddetta ascissa, la quale altro non è che la distanza del corpo puntiforme dal punto origine, misurata rispetto all'unità di misura prescelta e presa con il segno $+$ se il corpo si trova spostato rispetto all'origine nel verso di orientazione della retta, con il segno $-$ se invece si trova spostato dalla parte opposta. Indicata con x l'ascissa, la velocità v altro non è che il rapporto tra la variazione dx della posizione (cioè dell'ascissa) che ha luogo in un intervallo di tempo dt e questo stesso intervallo temporale:

$$v = \frac{dx}{dt};$$

¹ Un sistema di riferimento si dice inerziale quando vale in esso il primo principio della dinamica, quando cioè rispetto ad esso un corpo non soggetto a forze risulta essere in quiete o in moto rettilineo uniforme. Un buon esempio di sistema di riferimento inerziale è dato da una terna cartesiana con l'origine nel baricentro del Sole e assi orientati secondo le stelle fisse.

analogamente, l'accelerazione a è il rapporto tra la variazione della velocità dv che si produce in un intervallo dt e questo stesso intervallo temporale:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Dal momento che, in base al secondo principio della dinamica, l'accelerazione a è anche uguale al rapporto tra forza applicata e massa, otteniamo finalmente le equazioni di moto della particella:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$
$$\frac{dx}{dt} = v$$

Il teorema di Cauchy afferma che, note l'ascissa x_0 e la velocità v_0 ad un istante t_0 scelto come istante iniziale, esiste una ed una sola legge di evoluzione temporale, cioè una ed una sola relazione matematica tra l'ascissa x e il tempo t

$$x = x(t),$$

che rispetta le equazioni di moto e verifica la condizione iniziale. Se, per esempio, la forza F è costante in verso ed intensità e indichiamo con K questo valore costante allora la legge di evoluzione temporale in questione è

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{K}{2m} (t - t_0)^2.$$

I successi ottenuti con questi strumenti a partire dalla loro scoperta da parte di Newton e Leibniz furono tali da rendere gli scienziati del XVIII e del XIX secolo assai ottimisti sulla possibilità di arrivare a prevedere, almeno in linea di principio, le modalità di svolgimento di tutti i fenomeni che hanno luogo nell'universo. Se è vero, come segue dal teorema di Cauchy, che una volta note le forze agenti su un sistema e una volta misurate posizione e velocità ad un istante iniziale, l'evoluzione del sistema viene ad essere completamente determinata, allora si può anche essere tentati di affermare, come fece alla fine del '700 il grande matematico francese Pierre Simeon de Laplace, che, note la posizione e la velocità attuali di tutte le particelle dell'universo, si sarebbe in grado di prevederne l'evoluzione futura per l'eternità. Scoperte matematiche recenti hanno costretto però a rinunciare a queste pretese. Per poter spiegare in che cosa queste scoperte siano consistite, bisogna tornare

sull'enunciato del teorema di Cauchy per illustrare una sua parte precedentemente omessa. Il teorema di Cauchy non è soltanto un teorema di esistenza e unicità della traiettoria ma anche un risultato, come si suole dire in termini matematici, di dipendenza continua dai dati. Esso afferma infatti che, assegnate le equazioni di moto di un sistema dinamico, se si parte da due condizioni iniziali diverse ma vicine allora le traiettorie corrispondenti, anche se distinte, resteranno vicine almeno per tempi "non troppo distanti" da quello iniziale. Il nocciolo della questione sta proprio in quel "non troppo distanti". Viene da chiedersi, infatti, "quanto non troppo?". All'epoca di Laplace si pensava, come spesso si assume tuttora sulla base di regole di buon senso, che da piccole differenze nelle condizioni iniziali conseguissero differenze altrettanto piccole sull'intera traiettoria. Se questo fosse sempre vero allora, anche se la conoscenza delle variabili di stato al tempo iniziale è affetta da piccole imprecisioni, come è inevitabile che debba essere poiché nello studio dei fenomeni fisici questa conoscenza è frutto di misurazioni, una piccola imprecisione nella determinazione della condizione iniziale avrebbe ripercussioni altrettanto piccole sull'intera traiettoria e quindi il calcolo dello stato futuro risentirebbe soltanto di piccole alterazioni. In altre parole, all'epoca di Laplace si pensava che il fatto di avere delle equazioni di moto per un sistema dinamico fosse equivalente a dire che la sua evoluzione è necessariamente regolare, prevedibile e priva di ogni incertezza. Tuttavia non è proprio così e qualche indizio di ciò lo si aveva anche all'epoca. Ad esempio, già allora si era constatato che il movimento dei fluidi può svolgersi sia secondo andamenti regolari che secondo andamenti complessi. Il fumo di una sigaretta, il flusso dell'acqua nel letto di un ruscello e via dicendo possono evolvere in modo semplice, cioè con velocità costante e in maniera stazionaria, nel qual caso il moto si dice laminare, oppure in modo vorticoso e disordinato, nel qual caso il moto si dice turbolento. La cosa che stupì coloro che per primi si soffermarono sull'analisi di questi fenomeni fu il fatto che il moto di un fluido è governato sempre dalle stesse equazioni differenziali, sia nel caso laminare che nel caso turbolento. A cambiare sono soltanto i valori di alcune costanti che compaiono nelle equazioni. Come spiegare dunque tali evidenti differenze di comportamento?

3. I lavori di Poincaré e la crisi del determinismo

Per decenni l'interesse nei confronti di queste problematiche rimase limitato. Fu risvegliato soltanto agli inizi del XX secolo dagli studi del grande matematico e fisico francese Henri Poincaré. Poincaré può essere considerato il fondatore di quella branca della Matematica nota come teoria topologica dei sistemi dinamici; rispetto all'approccio classico essa differisce nel fatto che rinuncia alla pretesa di arrivare ad una determinazione numerica della legge di evoluzione temporale a partire dalle equazioni del moto portando avanti invece uno studio di tipo qualitativo. L'obiettivo di questo tipo di studio è determinare le caratteristiche geometriche delle traiettorie e non il loro esatto percorso. Poincaré fu il primo a prendere coscienza di quello che in anni più vicini fu denominato "effetto farfalla". Esso consiste, come suggerito dalle

questioni precedentemente poste, nella sensitività rispetto alle condizioni iniziali, vale a dire nel fatto che una piccola variazione nelle condizioni iniziali, dove piccola può significare anche impercettibile o difficilmente misurabile, abbia conseguenze drastiche nell'evoluzione successiva del sistema dinamico che si sta considerando. Anche nel caso di sistemi dinamici governati da equazioni di moto molto semplici (non troppo più complesse di quelle che abbiamo visto sinora) può accadere che a condizioni iniziali che differiscono in modo impercettibile corrispondano delle traiettorie che per tempi molto prossimi a quello iniziale sono abbastanza vicine ma che poi cominciano a differenziarsi sempre più fino a diventare completamente diverse. Quando questo accade le traiettorie si sviluppano in modo disordinato e imprevedibile come se fossero generate da un meccanismo aleatorio. Le parole migliori per spiegare ciò sono quelle dello stesso Poincaré. Citando testualmente:

Quando una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dell'universo in un istante immediatamente successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così: può accadere che piccolissime differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa perciò impossibile.

4. Simulazioni numeriche e considerazioni finali

Il mio obiettivo ora è di esporre i risultati di simulazioni numeriche effettuate al computer e relative all'evoluzione di un particolare sistema dinamico a tempo discreto. Prima di esporre tali risultati è bene colmare delle lacune nel discorso che è stato portato avanti sin qui. Abbiamo visto che nel caso di un sistema dinamico a tempo continuo le equazioni del moto si presentano nella forma di equazioni differenziali. Nel caso di sistemi dinamici a tempo discreto le equazioni del moto sono invece date da equazioni alle differenze. Rammento che un sistema dinamico si dice a tempo discreto quando le variazioni del suo stato avvengono in istanti ben precisi, in ciascuno dei quali il sistema salta da uno stato ad un altro. Chiamiamo t_0 l'istante iniziale, t_1, t_2, t_3, t_4 , e così via, gli istanti in cui il sistema salta da uno stato al successivo. Un'equazione alle differenze è una legge matematica che, dati i valori delle variabili di stato al tempo t_0 , permette di calcolare i loro valori al tempo t_1 , dati i valori al tempo t_1 , permette di calcolarne i valori al tempo t_2 e così via. L'esempio più semplice di sistema dinamico a tempo discreto è dato da una popolazione di batteri in coltura. Una popolazione di batteri, finché ha sufficiente spazio per espandersi e

purché venga adeguatamente nutrita, si sviluppa secondo una legge estremamente semplice: ad intervalli di tempo costanti (o pressoché tali) ogni cellula batterica si scinde dando vita a due nuove cellule. A patto di scegliere opportunamente la scala temporale (cioè l'unità di misura del tempo), possiamo supporre che l'intervallo tra due riproduzioni successive sia pari ad un'unità di tempo. Supponiamo che, all'istante iniziale, tutte le cellule batteriche che compongono la nostra popolazione abbiano la stessa età. Allora, indicata con x_0 la popolazione all'istante iniziale $t_0=0$, abbiamo che la popolazione x_1 al tempo 1 è data da $x_1=2x_0$ (è infatti il doppio della popolazione all'istante iniziale), la popolazione x_2 al tempo 2 è data da $x_2=2x_1=4x_0$, la popolazione x_3 al tempo 3 è data da $x_3=2x_2=8x_0$. Andando avanti in questo modo, raddoppiando cioè ad ogni tempo la popolazione al tempo precedente, si trova che la popolazione all'istante N , dove N è un numero intero, viene ad essere data da

$$x_N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_N x_0$$

ossia da

$$x_N = 2^N x_0 .$$

L'equazione che abbiamo appena scritto è la legge di evoluzione temporale del sistema dinamico discreto dato dalla popolazione di batteri che stiamo considerando: essa permette, noto il numero di individui che compongono questa popolazione all'istante fissato come iniziale, di calcolarne il numero ad un qualsiasi istante successivo. Ovviamente, il sistema dinamico discreto che è stato appena illustrato è troppo semplice perché si possa osservare, nella sua evoluzione, quella sensibilità alle condizioni iniziali di cui si è precedentemente parlato. In effetti, in questo caso molto semplice, a piccole incertezze nella condizione iniziale corrispondono traiettorie che differiscono di poco. Per esempio, applicando la legge di evoluzione temporale che abbiamo appena scritto a partire dalle condizioni iniziali $x_0=1$ e $x_0=1.000000001$ si ottengono i seguenti valori per $x_5, x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50}$ e x_{100} :

x_0	1	1.000000001
x_5	32	32.000000032
x_{10}	1024	1024.000001024
x_{20}	1048576	1048576.001048576
x_{30}	1073741824	1073741825.07374
x_{40}	1099511627776	1099511628875.5039
x_{50}	1125899906842624	1125899907968512.0000000000
x_{100}	1.267650600228229E+30	1.267650601495872E+30

Si può verificare che, ad ogni tempo, il rapporto tra i valori calcolati a partire dalle 2 diverse condizioni iniziali è pari esattamente al rapporto tra le condizioni iniziali medesime. Pertanto, se nella condizione iniziale c'è un'impresione (dovuta per esempio a errori di misurazione) l'errore percentuale si mantiene costante al variare del tempo. In particolare, se al tempo iniziale è piccolo esso si mantiene tale durante tutta l'evoluzione della traiettoria. Se passiamo a considerare sistemi dinamici discreti la cui legge di moto è più complessa di quella precedentemente vista, le cose possono andare ben altrimenti. Consideriamo il seguente modello dinamico a tempo discreto:

$$x(t+1) = (1 + r - sx(t))x(t) - h$$

dove r , s e h sono dei parametri (gli ultimi 2 maggiori o uguali di zero). Possiamo pensare la precedente equazione come la legge di sviluppo di una popolazione di animali di una certa prefissata specie che vivono all'interno di un determinato territorio: la variabile di stato x è il numero di individui che compongono la popolazione, r è il tasso di crescita nell'unità di tempo, il termine $-sx$ rappresenta la mortalità dovuta a sovraffollamento, mentre $-h$ è il tasso di prelievo. La precedente equazione si spiega nel seguente modo: se $x(t)$ è la popolazione al tempo t , allora la popolazione al tempo successivo ($t + 1$) viene ad essere data, in assenza di altri fattori, dalla somma della popolazione al tempo t più la differenza tra il numero di individui che nascono nell'intervallo di tempo tra l'istante t e l'istante $t + 1$ e il numero di quelli che, nello stesso intervallo di tempo, muoiono per via dell'età avanzata. Sperimentalmente si osserva che, per lunghi periodi di tempo, il numero di individui che nascono nell'unità di tempo è direttamente proporzionale alla popolazione esistente. La stessa cosa vale per il numero di individui che muoiono per via dell'età avanzata. Abbiamo perciò che il numero di individui che nascono fra il tempo t e il tempo $t + 1$ è dato da $r_1x(t)$, dove r_1 è una costante di proporzionalità a cui si dà il nome di tasso di natalità. Analogamente, il numero di individui che muoiono di vecchiaia nello stesso lasso di tempo viene ad essere dato da $r_2x(t)$, dove r_2 è una costante di proporzionalità a cui si dà il nome di tasso di mortalità. Pertanto, la differenza tra il numero di individui nati e il numero di individui morti fra l'istante t e l'istante $t + 1$ viene ad essere data da $rx(t)$, dove $r=r_1 - r_2$ è quello che abbiamo prima chiamato tasso di crescita. In natura, però, accade spesso che una popolazione di animali, obbligata a vivere dentro un territorio confinato, dopo essere cresciuta per un certo periodo di tempo cominci a subire gli effetti del sovraffollamento: poiché gli individui competono tra di loro per lo scarso cibo a disposizione o anche per semplice mancanza dello spazio vitale, il numero di animali che muoiono nell'unità di tempo viene ad aumentare. In molti casi, il numero di individui che muoiono per sovraffollamento è direttamente proporzionale al quadrato della popolazione corrente; pertanto, il sovraffollamento comporta che tra il tempo t e il tempo $t + 1$ muoia un numero aggiuntivo di animali pari a $sx(t)^2$, dove $sx(t)^2$ è il tasso di mortalità per sovraffollamento. La costante h , nota come tasso di prelievo, è presente quando, ad ogni unità di tempo, si verifica una diminuzione del numero di individui che

compongono la popolazione a causa di un intervento artificiale; è il caso, per esempio, di popolazioni di pesci soggette ad una attività di pesca a quote fisse. Supponiamo che il valore di x all'istante iniziale sia $x_0=0.2$ (possiamo pensare che la popolazione sia misurata in migliaia di individui, cosicché $x=0.2$ significa una popolazione di 200 individui) e vediamo come si evolve la popolazione al variare del tempo quando $s=1$, $h=0$ e $r=2.67$. Confrontiamo quindi questi valori con quelli che si ottengono partendo dalla condizione iniziale $x_0=0.201$.

x_0	0.200000	0.201000	0.200000100
x_1	0.694000	0.697269	0.694000327
x_2	2.065344	2.072793	2.065344746
x_3	3.314167	3.310679	3.314166
x_4	1.179291	1.189595	1.179292
x_5	2.937271	2.950678	2.937272
x_6	2.152224	2.122488	2.152221
x_7	3.266594	3.284576	3.266596
x_8	1.317764	1.265956	1.317759
x_9	3.099692	3.043414	3.099686
x_{10}	1.767779	1.906962	1.767793
x_{15}	2.818290	2.826781	2.818265
x_{20}	1.031224	1.020316	1.031273
x_{25}	3.027426	2.914652	3.027904
x_{30}	2.508938	1.532955	2.511136
x_{35}	3.195363	3.367205	3.206207
x_{40}	1.762367	2.513804	1.620922
x_{50}	1.019790	1.455012	1.402868
x_{60}	1.475139	1.271510	2.500552
x_{70}	1.086863	1.988528	2.253353
x_{80}	2.147712	2.551987	2.606330
x_{90}	2.461625	2.129046	1.024471
x_{100}	1.829026	2.470614	1.993874
x_{110}	1.447658	2.274021	2.597672
x_{120}	1.582278	2.312444	1.254847
x_{130}	1.351646	1.022802	1.510579
x_{140}	1.039463	1.813077	2.252864
x_{150}	2.566443	1.381349	2.603177
x_{160}	2.510169	1.708661	1.040233
x_{170}	1.683008	1.968022	2.542131
x_{180}	2.533856	2.152114	1.590680
x_{190}	1.169043	2.402144	1.129991
x_{200}	2.233288	1.901366	1.469274
x_{210}	2.092116	1.034427	1.021143
x_{220}	1.496010	2.603226	1.625784
x_{230}	1.784574	1.039305	1.578689
x_{240}	1.142505	2.570838	1.468698
x_{250}	1.022188	2.502590	1.019848
x_{260}	1.744111	2.147744	1.481400
x_{270}	1.125813	2.461272	1.245917

x_{280}	1.710545	1.810157	1.232093
x_{290}	1.914070	1.361963	1.019981
x_{300}	1.029343	1.063398	1.495936
x_{310}	2.407808	1.027475	1.781760

È immediato verificare che, dopo un primo lasso di tempo durante il quale le due traiettorie restano vicine (valori fino a x_{25}), trascorso questo esse si sviluppano secondo andamenti completamente differenti, tanto che un osservatore che avesse modo di osservare la loro evoluzione solo per tempi t maggiori o uguali di 30 non sarebbe minimamente in grado di arguire che all'istante iniziale esse partivano da punti quasi coincidenti. Il fenomeno appena descritto ha luogo anche quando la differenza nelle condizioni iniziali è pressoché trascurabile: se prendiamo come condizione iniziale $x_0=0.2000001$ otteniamo di nuovo una traiettoria che, dopo una prima fase di transizione (valori fino a x_{40}), si sviluppa in modo completamente diverso rispetto a quella che parte dalla condizione iniziale $x_0=0.2$. Si può constatare che l'unico effetto che ha il partire da una condizione iniziale più vicina al valore 0.2 ma comunque diversa da esso è di allungare la fase di transizione, cioè l'arco di tempo iniziale durante il quale le traiettorie restano vicine: la fase di transizione arriva fino al tempo $t=25$ nel primo esempio, fino a $t=40$ nel secondo. Superata questa fase lo sviluppo delle traiettorie procede in modo completamente inatteso. Va osservato che la differenza tra il valore 0.2000001 e il valore 0.2 è talmente piccola che può essere anche prodotta da un errore di misurazione: se la popolazione dovesse essere misurata, ad esempio, in miliardi di individui, ossia secondo una scala 1 ad 1 miliardo (non è una follia: le popolazioni batteriche coltivate in vitro possono essere ben più numerose), una differenza così piccola equivale ad un errore di misurazione pari a 100 individui su 1 miliardo. Il risultato di questo piccolo esperimento ci permette di ribadire l'affermazione di Poincaré: anche se un sistema dinamico è governato da leggi di sviluppo molto semplici, piccole imprecisioni nella misurazione delle condizioni iniziali possono portare a ipotizzare un comportamento sul lungo periodo completamente diverso da quello che il sistema avrà realmente. Questo dato di fatto è l'ostacolo principale e sovente insuperabile che si frappone alla possibilità di prevedere il comportamento a lungo termine di molti sistemi dinamici. Tra questi rientra certamente l'atmosfera terrestre, che per giunta è regolata da leggi di moto che sono molto più complesse di quelle assai semplici che abbiamo illustrato sinora. Non è un caso che, dopo i lavori pionieristici di Poincaré, le questioni che abbiamo esposto in codesto breve scritto siano state sollevate e analizzate innanzitutto da meteorologi. Tra questi spicca il nome di Edward Lorenz, al quale risale la denominazione di "effetto farfalla" per indicare la particolare sensibilità mostrata da moltissimi sistemi dinamici, atmosfera terrestre compresa, rispetto alle condizioni iniziali. Per spiegare questa proprietà Lorenz usò infatti il seguente esempio: la perturbazione provocata dal battito delle ali di una farfalla a Città del Capo potrebbe causare, dopo qualche giorno, radicali cambiamenti delle condizioni atmosferiche a Londra.

5. Grafici

Le figure che seguono sono i grafici relativi all'evoluzione del modello dinamico precedentemente considerato:

$$x(t+1) = (1 + r - sx(t))x(t) - h$$

a partire dalle condizioni iniziali $x_0=0.2$, $x_0=0.201$, $x_0=0.20001$ e $x_0=0.2000001$ rispettivamente. La prima coppia di figure è relativa ai risultati ottenuti prendendo $r=2.67$, $s=1$ e $h=0$. Il lettore è invitato ad osservare l'andamento particolarmente irregolare di questi grafici. La seconda coppia di figure è relativa invece ai risultati ottenuti prendendo $r=2.678$, $s=1$ e $h=0$. Come si può facilmente vedere i grafici di questa seconda sequenza manifestano un comportamento anche "più caotico" di quelli della precedente².

² Nel porre termine a questo breve scritto divulgativo non posso esimermi dal riconoscere il contributo dato ad esso da un articolo apparso sul numero 47 di «Lettera Matematica Pristem» (Springer editore), intitolato *Sistemi dinamici e caos deterministico* e firmato da G.I. Bischi, R. Carini, L. Gardini e P. Tenti. Da esso ho tratto ispirazione per la scrittura della parte introduttiva e sempre da esso ho ripreso gli esempi numerici dell'ultima sezione, a cui poi ho aggiunto le tabelle da me calcolate al computer e i relativi grafici.



